Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = \frac{1}{y} \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0).$$

Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $y(-1) = 1$ und was ist ihr maximales Definitionsintervall?

Lösung:
Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung, dazu gehen wir auf die informelle Art wie im Beispiel 4.6 aus dem Skript vor:

$$y' = \frac{1}{y} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \rightsquigarrow y\ dy = dx \rightsquigarrow \frac{1}{2}y^2 = x + C \rightsquigarrow y^2 = 2x + D \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{2x + D}$$

Damit erhalten wir also als allgemeine Lösung $\phi(x) = \sqrt{2x + D}$, der negativ Teil scheidet aufgrund von $y > 0$ aus.
Durch ableiten und einsetzen verifiziert man die Richtigkeit der Lösung:

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2x + D}} = \frac{1}{\phi(x)}.$$

Nun lösen wir das Anfangswertproblem (AWP) : Mit $y(-1) = 1$ erhalten wir
$1 = -2 + D \Leftrightarrow D = 3$.

Die Lösung lautet $\phi(x) = \sqrt{x + 3}$.

T2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \quad (x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1).$$

Lösung:
Auch hier können wir wieder die Variablen trennen. Wir gehen dabei wieder wie in der ersten Aufgabe vor:

$$y' = \sqrt{1-y^2} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = dx \rightsquigarrow \arcsin(y) = x+C \rightsquigarrow y = \sin(x+C)$$

Als Lösungskandidaten erhalten wir also: $\phi(x) = \sin(x + C)$.

Durch Ableiten und einsetzen verifizieren wir die Richtigkeit dieser Lösung:
$\phi'(x) = \cos(x + C) \overset{(Trig.Pyt.)}{=} \sqrt{1 - sin^2(x + C)} = \sqrt{1 - \phi(x)^2}$.

T3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = \cos(x)y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lösung: Man erkennt schnell, dass $y = 0$ eine Lösung der DGL ist. Variablentrennung kann man hier im Allgemeinen nicht machen, da $y = 0$ aufgrund des Definitionsbereiches möglich ist. Schränken wir nun den Definitionsbereich auf $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein, können wir die DGL wie in den vorangegangen Aufgaben lösen:

$$y' = \cos(x)y \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x)y \rightsquigarrow \frac{1}{y}dy = \cos(x)dx \rightsquigarrow \log|y| = \sin(x)+C \rightsquigarrow |y| = D\exp(\sin(x))$$

Wobei $D = \exp(C)$. Nun machen wir noch eine Fallunterscheidung:

Fall $y > 0$: Dann muss $D > 0$ gelten.

Fall $y < 0$: Dann muss $D < 0$.

Also erhalten wir als Lösung $\phi(x) = D\exp(\sin(x))$ mit $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

WIr bemerken also, dass für das in der Aufgabe vorgegebene Definitionsintervall $y = 0$ die einzige Lösung ist.